

Nombres premiers

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs entiers naturels.

7 admet pour seuls diviseurs 1 et 7, c'est donc un nombre premier.

4 est divisible par 1, 2 et 4, il n'est donc pas premier (un nombre entier qui n'est pas premier est dit composé)

Partie A test de primalité avec une boucle bornée

1. On considère l'algorithme ci-dessous, traduire cet algorithme en une fonction Python `estprema(n)` qui renvoie `True` si l'entier `n` est premier et `False` sinon.

```
Fonction estprema(n) :  
  Si  $n < 2$   
    renvoyer False  
  Si  $n = 2$   
    renvoyer True  
  Pour  $i$  allant de 2 à  $n - 1$   
    Si  $i$  divise  $n$   
      Renvoyer False  
  Renvoyer True
```

2. Modifier la fonction afin qu'elle renvoie également une décomposition de l'entier `n`, par exemple `estprema(10)` doit renvoyer `False, 5, 2`.

Tester la fonction avec un nombre le nombre 50370952483.

Partie B test de primalité avec une boucle non bornée

1. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
1 def estpremb(n) :  
2     if n<2:  
3         return False  
4     if n==2:  
5         return True  
6     d=2  
7     while d*d<=n:  
8         if n%d==0:  
9             return False  
10        d=d+1  
11    return True
```

Expliquer et justifier le choix de la condition à la ligne 7 du programme :

.....
.....
.....

2. Saisir le programme et vérifier si le nombre 567373 est premier :

Partie C une fonction polynôme

1. En 1772, Léonard Euler étudie la fonction polynôme P qui à un entier n associe $P(n) = n^2 + n + 41$. Écrire une fonction Python $P(n)$ qui prend un entier n en paramètre et renvoie l'image de n par P .
2. En utilisant la fonction `estpremb(n)` de la partie B et une boucle, déterminer le premier entier n dont l'image par P n'est pas un nombre premier.
3. Modifier votre programme pour qu'il affiche les nombres premiers obtenus avant d'atteindre un nombre composé.

Partie D une question de rang

On considère le programme Python ci-dessous :

```
1 def g():
2     compteur=0
3     n=1
4     while compteur<100:
5         n=n+1
6         if estpremb(n)==True:
7             compteur=compteur+1
8     return compteur
```

1. Expliquer à quoi correspond le nombre renvoyé par la fonction g .
.....
.....
.....
.....
2. En modifiant ce programme, déterminer le 1001 ème nombre premier.
.....
3. Les nombres de Mersenne sont les entiers de la forme $M_n = 2^n - 1$ ou n est un entier naturel non nul. Calculer les nombres de Mersenne M_3 et M_4 .
.....
4. La propriété « si $2^n - 1$ est premier alors n est premier » a été démontrée. A l'aide d'un contre-exemple trouvé grâce à une modification de votre programme, montrer que la réciproque de cette propriété est fausse.
.....
.....
.....