Suite de Fibonacci

Introduction

La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle doit son nom à Leonardo Fibonacci qui, dans l'ouvrage Liber abaci publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins. Les nombres de Fibonacci apparaissent parfois dans la nature, par exemple, le nombre de pétales de la marguerite appartient souvent à la suite de Fibonacci.

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \qquad \textit{pour} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Partie A questions préliminaires

1. On considère l'algorithme en langage naturel ci-dessous :

Initialisation :	$A = 0$
	$B = 1$
Traitement :	Répéter 4 fois :
	$C \leftarrow A$
	$A \leftarrow B$
	$B \leftarrow C + B$
Sortie :	Afficher B

compléter le tableau précisant la valeur des variables à chaque itération.

Variables	A	B	C
état initial	0	1	
première itération			
deuxième itération			
troisième itération			
quatrième itération			

2. Quelle est la valeur affichée en sortie d'algorithme, à quoi correspond-elle ?

....

3. Écrire, en utilisant une boucle bornée, une fonction `fibonacci(k)` qui calcule f_k, c'est-à-dire qui prend en argument un entier $k \geqslant 0$ et qui renvoie le terme d'indice k de la suite de Fibonacci.

4. Compléter le tableau ci-dessous :

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
0	1	1	2							

5. Écrire un programme qui détermine le premier nombre de Fibonacci à 4 chiffres.

Partie B Codage de Fibonacci

Théorème de Zeckendorf :

tout entier naturel $n > 1$ peut être décomposé, de manière unique, comme somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs.

Par exemple, $12 = 8 + 3 + 1$. La décomposition de Zeckendorf $12 = f_6 + f_3 + f_2$ est unique.

1. Écrire une fonction `pgf(n)` prenant en argument un entier $n > 1$ et renvoyant le plus grand terme f_k de la suite de Fibonacci vérifiant $f_k \leqslant n$.

2. Montrer l'existence d'une décomposition de Zeckendorf pour tout entier $n > 1$. (Nous admettrons son unicité.)

3. Le codage de Fibonacci est une représentation des entiers naturels non nuls fondée sur la décomposition de Zeckendorf. Si $n = \sum_{i=2}^{k} a_i \times f_i$ est la décomposition de Zeckendorf de l'entier n alors la chaîne de caractères $a_2a_3a_4...a_k$ est son code de Fibonacci.

   Par exemple, "00100101" est le code de Fibonacci de 50 car $50 = 0.f_2+0.f_3+1.f_4+0.f_5+0.f_6+1.f_7+0.f_8+1.f_9$.

   Écrire une fonction `decode` qui prend en paramètre un code de Fibonacci et qui renvoie l'entier n représenté par ce code. Par exemple, `decode("00100101")` devra retourner 50.

4. Écrire une fonction `code` qui prend en paramètre un entier strictement positif et renvoie le code de Fibonacci de ce nombre. Par exemple, `code(50)` retournera la chaîne de caractères "00100101".