3. Cesàro explique Benford!

Les numéros des maisons dans les rues obéissent à la loi de Benford à la condition de faire des moyennes successives inventées par le mathématicien Ernesto Cesàro (1859-1906). On désigne par $f_1(n)$ la fréquence du chiffre 1 comme premier chiffre dans la suite des n premiers nombres :
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21...

De même, $f_2(n)$ est la fréquence du chiffre 2 comme premier chiffre dans la suite des n premiers nombres :
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21...,
et ainsi de suite pour $f_3(n)$, $f_4(n)$, $f_5(n)$..., $f_9(n)$.

On effectue alors la moyenne à la Cesàro des $f_1(n)$:
$s_1(n) = [f_1(1)+f_1(2)+f_1(3)+f_1(4)+f_1(5)+f_1(6)+f_1(7)+...+f_1(n)]/n.$

Et de même :
$s_2(n) = [f_2(1)+f_2(2)+f_2(3)+f_2(4)+f_2(5)+f_2(6)+f_2(7)+...+f_2(n)]/n.$
Puis on réitère pour les moyennes de Cesàro $t_1(n)$, $t_2(n)$:
$t_1(n) = [s_1(1)+s_1(2)+s_1(3)+s_1(4)+s_1(5)+s_1(6)+s_1(7)+...+s_1(n)]/n,$
et :
$t_2(n) = [s_2(1)+s_2(2)+s_2(3)+s_2(4)+s_2(5)+s_2(6)+s_2(7)+...+s_2(n)]/n.$

La valeur de $f_1(n)$ varie entre 1/9 et 5/9 et la valeur de la suite $f_9(n)$ entre 1/81 et 1/9. En continuant ainsi, on obtient des valeurs qui oscillent de moins en moins, et B. Flehinger a démontré qu'en poursuivant ces calculs de moyennes l'intervalle de variation de ces sommes se réduit, à l'infini, à la valeur attendue, soit $\log_{10}(2)$ pour celle associée au 1.

Cette convergence d'une suite à la Cesàro est une idée intéressante dans la mesure où elle fait converger des suites qui étaient divergentes. L'exemple souvent cité est la suite 01010101... qui converge vers 1/2 au sens de Cesàro.